

# Säsongrensning – en handledning

Mikael Möller

hösten 1982  
reviderad hösten 2006

# Innehåll

<b>1</b>	<b>Förord</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Inledning</b>	<b>3</b>
2.1	Beteckningar och hänvisningssystem . . . . .	3
2.2	Modeller och modellantaganden . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Linjära filter</b>	<b>6</b>
3.1	Definitioner och beteckningar . . . . .	6
3.2	Differensekvationer . . . . .	7
3.3	Egenskaper hos linjära filter . . . . .	9
3.3.1	Funktioner som avbildas på 0 . . . . .	10
3.3.2	Funktioner som avbildas på sig själva . . . . .	12
3.4	Effekter på slumpkomponenten – periodicitetsmönster . . . . .	13
3.4.1	Förväntad period . . . . .	14
3.5	Slutskys sats . . . . .	18
3.6	Hur linjära filter konstrueras . . . . .	22
3.7	Slutsatser . . . . .	26
<b>4</b>	<b>Polynomfilter</b>	<b>28</b>
4.1	Metod . . . . .	28
4.2	Filtrering av tidsseriens ändrar . . . . .	30
<b>5</b>	<b>Henderson filter</b>	<b>33</b>
5.1	Henderson-filtret – konstruktion . . . . .	34
5.2	Henderson-filtret – egenskaper . . . . .	36

# 1

## Förord

Föreliggande arbete är en bearbetning av de tre seminarier, om lineär filtrering, som jag höll hösten 1982.

Seminarierna var en del av ett större projekt vars syfte är att sprida kunskap, om den metod för säsongrensning som F-avdelningen på Statistiska centralbyrån (SCB) har beslutat sig för, samt skapa programmeringsverktyg och dokumentation så att säsongrensningen skall kunna utföras av SCB:s handläggare.

Under arbetets gång har följande personer bidragit med stimulerande diskussioner: Christer Shapiro och Ed Palmer från konjunkturinstitutet, Alexander Markowski från Riksbanken och Erik Andersson, Catharina Elffors, Gunnar Gehlin och Staffan Lewin alla från SCB.

Särskilt tack riktas till Christer Shapiro, som gjort nödvändiga program och framställt de i texten ingående figurerna.

Mikael Möller, hösten 1982

Handledningen har överförts till  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  varvid en del rättelser och förtydliganden gjorts.

Mikael Möller, hösten 2006

## 2

# Inledning

Syftet med denna rapport är att ge nödvändig bakgrund för förståelsen av säsongrensningmetoder i allmänhet och X11-ARIMA i synnerhet. Som en följd av det senare kommer arbetet att inrikta sig på linjära filter och deras egenskaper.

## 2.1 Beteckningar och hänvisningssystem

I denna rapport betecknar stora bokstäver stokastiska (slumpmässiga) element och små bokstäver deterministiska element. I den additiva modellen nedan är således  $c_t$  och  $s_t$  deterministiska funktioner och  $I_t$  ett stokastiskt element eller som man också säger en stokastisk variabel.

Rapporten delas upp i 5 kapitel och varje kapitel delas i sin tur upp i sektioner (även undersektioner förekommer). Inom varje sektion numreras formler, satsar, definitioner m m i stigande ordning. Med hänvisningen (3.2.4) skall då förstås kapitel 3, sektion 2 och undersektion 4.

## 2.2 Modeller och modellantaganden

Traditionellt delas tidsserier, vid säsongrensning, upp i tre komponenter: trendcykel, säsongvariation och slumpmässig variation. Med dessa tre komponenter kan en mångfald av olika modeller bildas. Men vanligen klarar man sig med två modeller – den rent additiva och den rent multiplikativa modellen. Då den senare övergår i den förra (inte helt sant men ofta tillräckligt för våra behov), vid logaritmering, skall vi framöver endast betrakta den additiva modellen.

För tidsserien och dess komponenter inför vi följande beteckningar

$$\begin{aligned} O_t &= \text{originalserien vid tidpunkt } t \\ c_t &= \text{trendcykeln vid tidpunkt } t \\ s_t &= \text{säsongvariationen vid tidpunkt } t \\ I_t &= \text{slumpmässig variation vid tidpunkt } t \end{aligned}$$

och den additiva modellen kan då skrivas

$$(2.1) \quad O_t = c_t + s_t + I_t$$

**Grundproblematiken vid säsongrensning är att ur originalserien  $\{O_t\}$  extrahera serierna  $\{c_t\}$ ,  $\{s_t\}$  och  $\{I_t\}$ .**

Notera att denna exposé ej räknar med extrema händelser typ strejker, rörliga heger m.m. Utan här betecknar  $I_t$  endast "sann" slump som tex de slumpmässiga fel som uppstår vid stickprovstagning.

Den mer allmänna modellen

$$(2.2) \quad O_t = c_t + s_t + d_t + I_t''$$

där

$$\begin{aligned} d_t &= \text{arbetstidseffekt vid tidpunkt } t \\ I_t'' &= p_t + E_t + I_t \\ p_t &= \text{helg, semester, strejk m.m effekt vid tidpunkt } t \\ E_t &= \text{oförklarligt extremvärde vid tidpunkt } t \end{aligned}$$

kommer ej att behandlas i denna handledning. Ej heller tar vi upp det fall då trendcykeln och säsongvariationen betraktas som stokastiska.

I vår additiva säsongrensningsmodell 2.1 skall vi antaga att  $I_t, t \in T$  är oberoende normalfördelade stokastiska variabler med väntevärde 0 och standardavvikelse  $\sigma$ . Mängden  $T$  är en ändlig, eller oändlig, diskret indexmängd. Ett förkortat skrivsätt för detta antagande är

$$I_t \in ON(0, \sigma) \quad t \in T$$

Vi antar att säsongvariationen,  $s_t$ , och trendcykeln,  $c_t$ , är deterministiska funktioner beroende av tiden  $t$ .

Med säsongrensning skall vi nu ideallt förstå en metod som ur serien  $\{O_t\}$  kan plocka ut endera av de tre komponenterna  $\{c_t\}$ ,  $\{s_t\}$  och  $\{I_t\}$ . Detta uttrycker vi med följande definition

**Definition 2.1** *Med säsongrensning av serien*

$$(2.3) \quad O_t = C_t + S_t + I_t$$

$$\begin{aligned} F_1(O_t) &= C_t \\ F_2(O_t) &= S_t \\ F_3(O_t) &= I_t \end{aligned}$$

Att finna dessa funktioner  $F_1$ ,  $F_2$  och  $F_3$  är naturligtvis inte möjligt utan istället får man inrikta sig på att finna lämpliga approximationer. En första vanlig approximation är att ersätta funktionen  $F_i$  med en linjär funktion  $L_i$  och antaga att

$$F_i(O_t) \approx L_i(O_t), \quad i = 1, 2, 3 \text{ och } t \in T$$

En ytterligare approximation erhålls då alla funktioner  $L_i$  antages vara lika. Ett specialfall av denna senare approximation utgörs av linjära filter. En klass av funktioner som denna rapport skall titta på.

Vi har här varit relativt noga med att ange de approximationer och antaganden som görs vid säsongrensning. Förhoppningen är att den presumptive

användaren därigenom skall undvika en del av de fällor och fel som uppstår vid det praktiska utnyttjandet av säsongrensningssmetoden X11-ARIMA. Ty som vid all modellering gäller att data måste uppfylla modellens förutsättningar. Användaren har därför skyldigheten att kontrollera om data uppfyller dessa, här givna, förutsättningar.

# 3

## Linjära filter

### 3.1 Definitioner och beteckningar

Nästan all säsongrensningmetodik baserar sig på linjär filtrering och vi skall börja med att definiera vad vi skall mena med ett linjärt filter.

**Definition 3.1** Med ett linjärt filter skall vi förstå en linjär funktion  $L$  sådan att till varje följd  $\{x_t\}$  det gäller

$$(3.1) \quad L(x_t) = \sum_{i=m}^n l_i x_{t-i} \quad t \in T' \subset T$$

för någon indexmängd  $T'$  och där talen  $l_i$  är reella och sådana att  $\sum l_i = 1$ .

Om  $m = -n$  och  $l_i = l_{-i}$  så säges filtret vara **symmetriskt** annars **asymmetriskt**. För symmetriska filter har man infört följande beteckning

$$(3.2) \quad L = [l_{-n}, l_{-n+1}, \dots, l_{-1}, l_0]$$

Om i ett godtyckligt filter alla vikter är lika ( $l_i = l_j$  för alla val av  $i$  och  $j$ ) skriver man

$$L = \frac{1}{n-m+1} [n-m+1]$$

och i alla övriga fall:  $L = [l_i]_{i=m}^n$ .

Med hjälp av fasförskjutningsoperatoren  $B$ , vilken definieras av relationen  $Bx_t = x_{t-1}$ , kan formel 3.1 ovan skrivas

$$L(x_t) = \sum_{i=m}^n l_i x_{t-i} = \sum_{i=m}^n l_i B^i x_t = L(B) x_t$$

där  $L(B) = \sum_{i=m}^n l_i B^i$ . Operatoren  $L(B)$  skall vi kalla förskjutningspolynomet hörande till filtret  $L$ . Linjäritetsegenskaperna hos det linjära filtret kan nu, med hjälp av förskjutningspolynomet, skrivas

$$(3.3a) \quad L(B)(x_t + y_t) = L(B)x_t + L(B)y_t$$

$$(3.3b) \quad L(B)ax_t = aL(B)x_t$$

I föregående kapitel definierade vi säsongrensning som en metod att plocka fram komponenterna  $c_t$ ,  $s_t$  och  $I_t$ . Ett annat sätt att uttrycka detta är att säga att säsongrensning är en metod att eliminera komponenterna  $c_t$ ,  $s_t$  och  $I_t$ . Ty att plocka fram  $c_t$  är detsamma som att eliminera  $s_t$  och  $I_t$ . Denna dualitet ger att vi är intresserade av att undersöka ett lineärt filter med avseende på egenskaperna

$$(3.4a) \quad L(B)x_t = x_t$$

$$(3.4b) \quad L(B)y_t = 0$$

eller alternativt konstruera ett filter med dessa egenskaper. För denna undersökning/konstruktion behöver vi teorin för linjära differensekvationer.

## 3.2 Differensekvationer

Med en linjär differensekvation, av ordning  $n$  och med reella konstanta koefficienter  $a_0, a_1, \dots, a_n$  menas en ekvation av formen

$$(3.5) \quad a_0x_t + a_1x_{t-1} + \dots + a_nx_{t-n} = y_t \quad t \in T'$$

där följderna  $\{y_t\}$  är kända. Om  $y_t = 0$  för alla  $t$  säges ekvationen vara homogen annars icke-homogen.

Med hjälp av förskjutningsoperatoren kan denna ekvation skrivas

$$(3.6) \quad A(B)x_t = y_t \quad t \in T'$$

där  $A(B) = a_0 + a_1B + \dots + a_nB^n$ . Polynomet  $C(x) = x^n A\left(\frac{1}{x}\right)$  kallas det karakteristiska polynomet hörande till ekvation 3.5 ovan.

**Sats 3.1** *Den allmänna lösningen till ekvation 3.5 ovan kan skrivas*

$$x_t = x_t^H + x_t^P$$

där  $x_t^H$ , ekvationens homogena lösning, och  $x_t^P$ , ekvationens partikulära lösning, uppfyller

$$\begin{aligned} A(B)x_t^H &= 0, \\ A(B)x_t^P &= y_t. \end{aligned}$$

Sats 3.1 ger oss en metod för att lösa differensekvationer med konstanta koefficienter dvs om vi kan hitta den homogena respektive partikulära lösningen så har vi också hittat lösningen till differensekvationen. Man kan även visa att det räcker med en partikulär lösning (vilken som helst).

Det finns ingen allmän metod för att finna den partikulära lösningen utan man är hänvisad till diverse knep och sin egen matematiska intuition. Annat är läget när det gäller den homogena lösningen och resten av detta avsnitt skall vi ägna åt att finna den homogena lösningen.

Om  $r_1, r_2, \dots, r_n$  betecknar nollställena till polynomet  $C(x)$  så kan detta faktoreruppdelas och vi har

$$C(x) = a_0(x - r_1)(x - r_2) \cdots (x - r_n).$$

Observera att om något  $r_i$  är komplext så finns  $r_j$  sådant att  $r_i = \bar{r}_j$  ty koefficienterna  $a_0, a_1, \dots, a_n$  är reella.



**Sats 3.2** Om varje nollställe till  $C(x)$  förekommer endast en gång så har differensekvationen

$$A(B)x_t = 0$$

lösningen

$$x_t = b_1 r_1^t + \dots + b_n r_n^t$$

där konstanterna  $b_1, b_2, \dots, b_n$  bestäms av begynnelsevillkoren, i allmänhet värdena  $x_0, x_1, \dots, x_{n-1}$ .

**Bevis.** Vi skall bevisa satsen medelst ett induktionsbevis.

1. Om  $n = 1$  så gäller att

$$(1 - r_1 B)x_t = 0 \Rightarrow x_t = r_1 x_{t-1} = r_1^2 x_{t-2} = \dots$$

varav följer att

$$x_t = x_0 r_1^t = b_1 r_1^t$$

2. Antag nu att satsen är sann då  $n = k$  och sätt  $z_t = (1 - r_{k+1} B)x_t$  då erhålls

$$\begin{aligned} (1 - r_1 B)(1 - r_2 B) \dots (1 - r_k B)(1 - r_{k+1} B)x_t &= 0 \\ (1 - r_1 B)(1 - r_2 B) \dots (1 - r_k B)z_t &= 0 \end{aligned}$$

varvid vi erhåller

$$z_t = b'_1 r_1^t + \dots + b'_n r_n^t$$

ty satsen är sann då  $n = k$ . Vi har nu ekvationen

$$(1 - r_{k+1} B)x_t = b'_1 r_1^t + \dots + b'_n r_n^t$$

och den har den partikulära lösningen

$$\begin{aligned} x_t^P &= b_1 r_1^t + \dots + b_n r_n^t, \\ b_i &= \frac{b'_i r_i}{r_i - r_{k+1}} \quad i = 1, 2, \dots, k. \end{aligned}$$

Detta följer av

$$\begin{aligned} (1 - r_{k+1} B) \sum_{i=1}^k b_i r_i^t &= \sum_{i=1}^k (b_i r_i^t - r_{k+1} b_i r_i^{t-1}) \\ &= \sum_{i=1}^k b_i r_i^{t-1} (r_i - r_{k+1}) \\ &= \sum_{i=1}^k \frac{b'_i r_i}{r_i - r_{k+1}} r_i^{t-1} (r_i - r_{k+1}) \\ &= b'_1 r_1^t + \dots + b'_k r_k^t. \end{aligned}$$

Den homogena lösningen blir

$$x_t^H = b_{k+1} r_{k+1}^t$$

och vi har

$$x_t = x_t^P + x_t^H = b_1 r_1^t + \dots + b_n r_n^t + b_{k+1} r_{k+1}^t.$$

### 3. Induktionsprincipen ger nu påståendet

■

Återstår att betrakta det fall då det karakteristiska polynomet  $C(x)$  har multipla nollställen. Vi börjar med endast ett dubbel-nollställe  $-r_1 = r_2$ .

Låt först  $r_2$  vara ett nollställe som ligger på avståndet  $\epsilon$  från  $r_1$ . Vi har således att  $r_2 = r_1 + \epsilon$  samt att uttrycket

$$\frac{(r_1 + \epsilon)^t - r_1^t}{\epsilon}$$

är en lösning till  $A(B)x_t = 0$  för alla  $\epsilon$ . Härav följer att

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{(r_1 + \epsilon)^t - r_1^t}{\epsilon} = tr_1^{t-1}$$

också är en lösning till  $A(B)x_t = 0$  när vi har ett dubbelt nollställe.

Den fullständiga lösningen vid ett dubbel-nollställe kan därför skrivas

$$x_t = (b_1 + b_{11}t)r_1^t + \dots + b_k r_k^t + b_{k+1} r_{k+1}^t$$

vilket låter sig generaliseras till följande allmänna sats.

**Sats 3.3** Den allmänna lösningen till differensekvationen  $A(B)x_t = 0$  är

$$x_t = \sum_{i=1}^m \left( \sum_{j=0}^{m_i} b_{ij} t^j \right) r_i^t \quad \sum_{i=1}^m m_i = n$$

där  $r_1, r_2, \dots, r_n$  är nollställen till det karakteristiska polynomet  $C(x)$ . Vardera av multiplicitet  $m_i$ .

## 3.3 Egenskaper hos linjära filter

I nästan alla säsongrensningsprogram, och speciellt X11-ARIMA, filtreras den betraktade tidsserien flera gånger med olika linjära filter. Resultatet av dessa operationer är ett nytt linjärt filter – ty vi har följande sats.

**Sats 3.4** Om  $L_1$  och  $L_2$  är två linjära filter så blir filtret

$$L_3 = L_1(L_2) = L_2(L_1)$$

också linjärt.

**Bevis.** Vi har

$$\begin{aligned} y_t &= L_1(x_t) = L_1(B)x_t, \\ z_t &= L_2(y_t) = L_2(B)y_t. \end{aligned}$$

varav

$$z_t = L_2(B)y_t = L_2(B)L_1(B)x_t = L_3(B)x_t$$

där

$$\begin{aligned}
 L_3(B) &= \sum_i l_{1,i} B^i \sum_j l_{2,j} B^j \\
 &= \sum_i \sum_j l_{1,i} l_{2,j} B^{i+j} \\
 &= \sum_k \left( \sum_i l_{1,i} l_{2,k-i} \right) B^k \\
 &= \sum_k l_{3,k} B^k
 \end{aligned}$$

där  $\sum_k l_{3,k} = \sum_i l_{1,i} l_{2,k-i}$ . ■

I X11-ARIMA finns två centrala filter dels det centrerade 12-månaders filtret och dels Hendersonfiltret. Det senare filtret är relativt komplicerat så det får ett eget avsnitt i kapitel 5 på sid 33. Däremot är det centrerade 12-månadersfiltret lätt att räkna på och därför skall vi ta det som genomgående exempel i detta avsnitt.

Det centrerade 12-månadersfiltret definieras av sammansättningen av de två filtren  $L_1 = \frac{1}{12} [12]$  och  $L_2 = \frac{1}{2} [2]$ . Det resulterande filtret

$$(3.7) \quad L_3 = \frac{1}{24} [12] [2] = \frac{1}{24} [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$$

är symmetriskt. Beviset härför överlåtes på läsaren.

### 3.3.1 Funktioner som avbildas på 0

De funktioner som det linjära filtret  $L$  avbildar på noll är de funktioner  $x_t$  som ingår i den homogena lösningen till

$$L(B) x_t = 0.$$

**Exempel 3.1** För filtret  $L = \frac{1}{24} [1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$  erhålls differensekvationen

$$x_{t-6} + 2x_{t-5} + 2x_{t-4} + \dots + 2x_{t+4} + 2x_{t+5} + x_{t+6} = 0$$

vars karakteristiska ekvation är

$$x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + \dots + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Ekvationen synes hopplös att lösa men med följande observation erhålls de 12 rötterna lätt:

$$x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + \dots + 2x^2 + 2x + 1 = \frac{(1+x)(1-x^{12})}{1-x} \quad x \neq 1.$$

Det gäller nu att finna lösningarna till den betydligt enklare binomiska ekvationen  $1 - x^{12} = 0$  samt att utesluta lösningen  $x = -1$ . Detta ger oss 11 rötter och

den 12:te är självklart  $x = -1$ . På så sätt erhålls den homogena lösningen till<sup>1</sup>

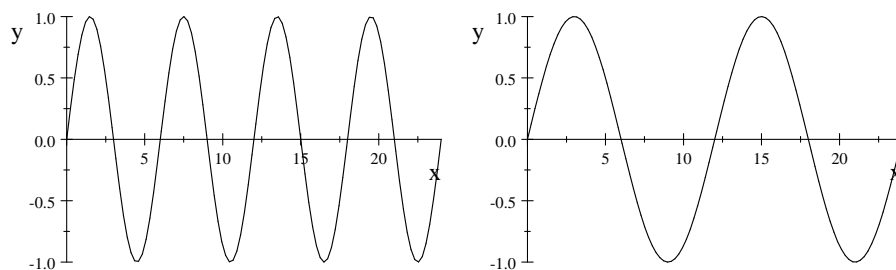
$$\begin{aligned} x_t^H &= (b_1 + b_2 t)(-1)^t + \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 6}}^{11} b_{k+2} \left( e^{k\pi i/6} \right)^t \\ &= (b_1 + b_2 t)(-1)^t + \sum_{k=1}^5 \left( b_{k+2} e^{k\pi i t/6} + b_{13-k} e^{-k\pi i t/6} \right) \\ &= (b_1 + b_2 t)(-1)^t + \sum_{k=1}^5 f_k(t) \end{aligned}$$

där funktionerna  $f_k(t)$  är periodiska med följande perioder

$k$	Funktion $f_k(t)$	Period
1	$b_3 e^{t\pi i/6} + b_{12} e^{-t\pi i/6}$	12
2	$b_4 e^{t\pi i/3} + b_{11} e^{-t\pi i/3}$	6
3	$b_5 e^{t\pi i/2} + b_{10} e^{-t\pi i/2}$	4
4	$b_6 e^{t2\pi i/3} + b_9 e^{-t2\pi i/3}$	6
5	$b_7 e^{t5\pi i/6} + b_8 e^{-t5\pi i/6}$	12

Detta innebär att filtret släcker en i ekonomiska sammanhang ointressant funktion, alternerande lineär, men också att filtret tar bort alla svängningar av period 12 (månader), 6 (halvår) och 4 (kvartal) samt kombinationer av dessa. Detta är mycket intressanta inom ekonomiska sammanhang ty om man kan ta bort effekterna av normala ekonomiska svängningar så återstår endast det som betecknas irreguljärt och den delen är intressant att studera för att se om något hänt, om teorin inte stämmer, om det finns mer struktur o s v.

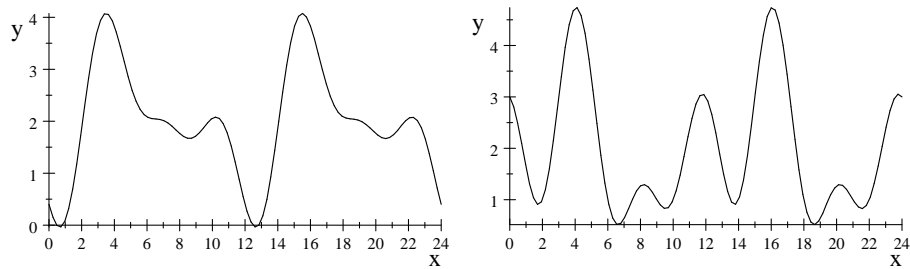
Några exempel på periodiska funktioner som avbildas på noll ges i figurerna nedan.<sup>2</sup>



<sup>1</sup>För  $k = 6$  erhålls  $-1$  och den finns redan i det lineära uttrycket till vänster.

<sup>2</sup>Funktionerna som avbildas på 0 är:

1.  $\sin\left(\frac{\pi}{3}t\right)$ ,
2.  $\sin\left(\frac{\pi}{6}t\right)$ ,
3.  $2 + \sin\left(\frac{p}{6}t - 1\right) + \sin\left(\frac{p}{3}t + 4\right) - 0.5 \sin\left(\frac{p}{2}t\right)$ ,
4.  $\sin\left(\frac{2p}{12}t\right) + \sin\left(\frac{2p(t-3)}{6}\right) + \sin\left(\frac{2p(t+1)}{4}\right)$



Det går som synes att avbilda en stor mängd av periodiska funktioner på noll och eftersom periodiciteter är allmänt förekommande i ekonomiska tidsserier är det inte svårt att förstå varför linjär filtrering är användbart för att förstå just ekonomiska tidsserier. Det finns dock en baksida – vad händer med de funktioner som inte avbildas på noll. Vi skall nu först studera de funktioner som filtret avbildar på sig själva dvs de funktioner som filtret släpper igenom ograverade.

### 3.3.2 Funktioner som avbildas på sig själva

De funktioner som avbildas på sig själva är de som är lösningar till differensekvationen

$$L(B)x_t = x_t.$$

Denna ekvation är en maskerad homogen differensekvation ty det gäller

$$(L(B) - 1)x_t = 0.$$

**Exempel 3.2** För filtret  $L = \frac{1}{24}[1, 2, 2, 2, 2, 2, 2]$  erhålls differensekvationen

$$x_{t-6} + 2x_{t-5} + 2x_{t-4} + \dots + 2x_{t+4} + 2x_{t+5} + x_{t+6} = 24x_t$$

vars karakteristiska ekvation blir

$$x^{12} + 2x^{11} + 2x^{10} + \dots + 2x^7 - 22x^6 + 2x^5 + \dots + 2x^2 + 2x + 1 = 0.$$

Medelst faktorisering erhålls faktorn  $(1 - x)^2$  och faktorn

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + 36x^5 + 25x^6 + 16x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10} = 0.$$

Den första faktorn ger oss rötterna  $r_1 = r_2 = 1$  och det återstår att lösa ekvationen

$$1 + 4x + 9x^2 + 16x^3 + 25x^4 + 36x^5 + 25x^6 + 16x^7 + 9x^8 + 4x^9 + x^{10} = 0$$

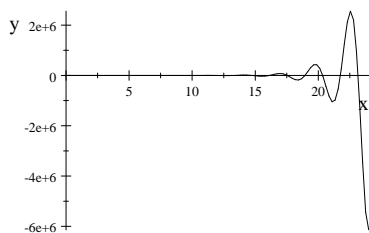
för att finna rötterna  $r_3, \dots, r_{12}$ . Vi gör detta numeriskt och erhåller då lösningen på formen

$$x_t = (b_1 + b_2 t) + \sum_{k=3}^{12} b_k r_k^t.$$

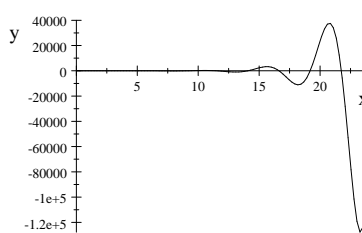
I tabellen nedan anger vi värdena på  $r_k$  och deras absoluta belopp:

$k$	$r_k$	$ r_k $	
1,2	1		
3	-2.033	2.033	
4	-0.492	0.492	
5	-1.157 + 1.466i	1.868	$f_1(t)$
6	-1.157 - 1.466i		
7	0.542 + 1.518i	1.612	$f_2(t)$
8	0.542 - 1.518i		
9	0.209 + 0.584i	0.9998	$f_3(t)$
10	0.209 - 0.584i		
11	-0.332 + 0.420i	0.535	$f_4(t)$
12	-0.332 - 0.420i		

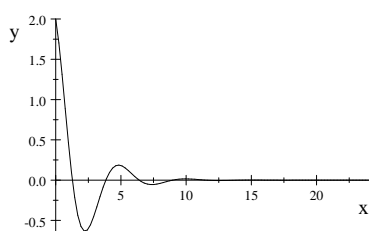
Lösningen  $x_t$  innehåller således linjära trender (rötterna 1 och 2), explosiva tillskott (rötterna 3, 5, 6, 7 och 8) samt snabbt avtagande funktioner (rötterna 4, 9, 10, 11 och 12). Detta är dels glädjande ty filtret släpper igenom linjära trender (vanligt förekommande i ekonomiska tidsserier) och dels brydsamt eftersom ingen, av mig, känd ekonomisk teori ger upphov till de andra funktionerna. Avslutningsvis ger vi figurerna för de fyra funktionerna  $f_1$ - $f_4$ :



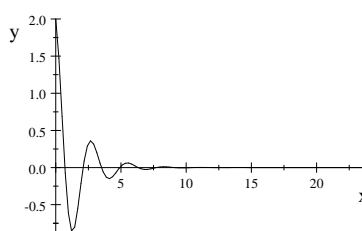
Funktionen  $f_1$ .



Funktionen  $f_2$ .



Funktionen  $f_3$ .



Funktionen  $f_4$ .

### 3.4 Effekter på slumpkomponenten – periodicitetsmönster

Vi skall nu undersöka vad som händer när vi filtrerar en slumpmässig serie  $\{I_t\}$  med ett linjärt filter  $L$ . Om serien  $\{I_t\}$  skall vi antaga att de stokastiska elementen  $I_t, t \in T$  är oberoende och normalfördelade med väntevärdet 0 och

variansen  $\sigma^2$ . Den filtrerade serien betecknar vi med  $\{Y_t\}$  och det gäller

$$Y_t = L(I_t) = \sum_{i=m}^n l_i I_{t-i}$$

samt att

$$(3.8a) \quad E(Y_t) = 0$$

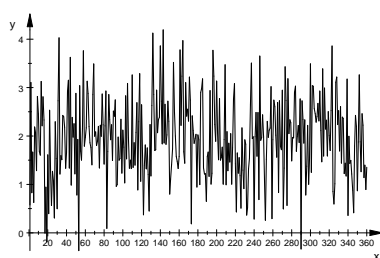
$$(3.8b) \quad \begin{aligned} \gamma_k &= E(Y_t Y_{t+k}) \\ &= E\left(\sum_{i=m}^n l_i I_{t-i} \sum_{j=m}^n l_j I_{t+k-j}\right) \\ &= \sum_{i=m}^n \sum_{j=m}^n l_i l_j E(I_{t-i} I_{t+k-j}) \end{aligned}$$

$$(3.8c) \quad \begin{aligned} \{t-i = t+k-j\} &= \sigma^2 \sum_{\substack{i+j=k \\ i,j=m,\dots,n}} l_i l_j = \sigma^2 \sum_{i=m}^n \sum_{\substack{j=m \\ i+j=k}}^n l_i l_j \\ &= \sigma^2 \sum_{i=m}^n l_i l_{k-i} \end{aligned}$$

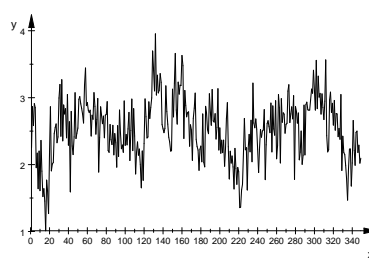
där den sista likheten följer av antagandet om oberoende och att  $E(I_t) = 0$ . Processen  $\{Y_t\}$ :s kovariansfunktion beror således endast av  $k$  och ej av  $t$ . Härav följer att processen är kovariansstationär. Speciellt har vi att  $\{Y_t\}$  är en "moving average"-process av ordning  $n - m$  och detta betecknas

$$Y_t \in MA(n - m).$$

I figurerna nedan beskriver den första kurvan processen  $\{I_t\}$  (vitt brus) och den andra den filtrerade processen  $\{Y_t\}$ . Det filter som har använts här är  $L = \frac{1}{24} [2] [12]$ .



Vitt brus



Filtrerat vitt brus

### 3.4.1 Förväntad period

De två figurerna indikerar att en linjär filtrering kan ge upphov till mönstret där inga fanns från början. Denna periodicitets natur skall vi nu utreda. Först definierar vi begreppet period hos en kovariansstationär stokastisk process. Det finns flera olika sätt och vi väljer följande:

**Definition 3.2** *Perioden för en kovariansstationär stokastisk process med väntevärde noll definieras av avståndet mellan processens uppkorsningar. En uppkorsning definieras av att den stokastiska processen byter tecken från minus till plus.*

Perioden för en stokastisk process är naturligtvis inte ett deterministiskt tal utan en stokastisk variabel och vi skall bestämma dess förväntade värde. Beteckna perioden med  $P$ .

Inför hjälpvariabeln  $Z_t$  som kontrollerar om en uppkorsning sker i intervallet  $(t, t + 1]$  samt hjälpvariabeln  $N_a$  som räknar antalet uppkorsningar i intervallet  $(0, a - 1]$  ( $t$  och  $a$  antar här heltalsvärden men det går att göra det mer allmänt). Detta ger oss följande definitioner av  $Z_t$  och  $N_a$ :

$$Z_t = \begin{cases} 1 & Y_t < 0, Y_{t+1} > 0 \\ 0 & \text{annars} \end{cases},$$

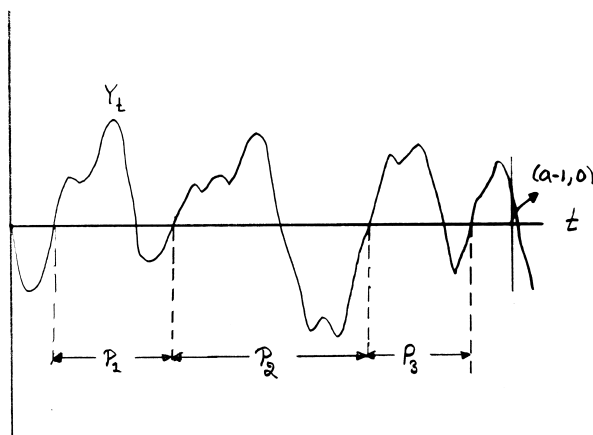
$$N_a = \sum_{t=0}^{a-1} Z_t.$$

I intervallet  $(0, a - 1]$  sker  $N_a$  uppkorsningar och avståndet mellan den  $i$ :te och  $i + 1$ :a uppkorsningen betecknar vi med  $P_i$ . Detta  $P_i$  är den  $i$ :te mätningen på den stokastiska variabeln  $P$ , processens period. Vi bildar nu följande två stokastiska variabler:

$$\frac{a}{N_a} = \text{genomsnittlig längd mellan uppkorsningar i intervallet } (0, a-1] + \text{ lite skräp i ändarna}$$

$$\frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} P_i = \text{genomsnittlig periodlängd i intervallet } (0, a-1]$$

Av figuren nedan indikeras att dessa två variabler är approximativt lika samt att approximationen blir bättre när  $a \rightarrow \infty$ .



Således gäller sambandet

$$(3.9) \quad \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{N_a} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} P_i.$$



Väntevärdet av högerledet i (3.9) erhålls till

$$\begin{aligned}
 E\left(\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} P_i\right) &= \lim_{a \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} P_i\right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} E\left(E\left(\frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} P_i \mid N_a\right)\right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} E\left(\frac{1}{N_a - 1} \sum_{i=1}^{N_a-1} E(P_i \mid N_a)\right) \\
 &= \lim_{a \rightarrow \infty} E(E(P)) = E(P)
 \end{aligned}$$

Vi har därmed lyckats få en likhet mellan det vi söker,  $E(P)$ , och något som vi förhoppningsvis kan beräkna. Med hjälp av Gauss approximationsformel erhålls nu (observera  $a$  ej är stokastisk)

$$E(P) = E\left(\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{N_a}\right) = \lim_{a \rightarrow \infty} E\left(\frac{a}{N_a}\right) \approx \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{a}{E(N_a)}.$$

Återstår att beräkna

$$\begin{aligned}
 E(N_a) &= E\left(\sum_{t=0}^{a-1} Z_t\right) = \sum_{t=0}^{a-1} E(Z_t) \\
 &= \sum_{t=0}^{a-1} P(Y_t < 0, Y_{t+1} > 0) \\
 &= \sum_{t=0}^{a-1} P(Y_0 < 0, Y_1 > 0) \\
 &= aP(Y_0 < 0, Y_1 > 0)
 \end{aligned}$$

där vi i steg 3 utnyttjat att processen  $\{Y_t\}$  är en normalprocess. Närmare bestämt har vi utnyttjat att en kovariansstationär normalprocess är stationär. Problemet är nu reducerat till att bestämma  $P(Y_0 < 0, Y_1 > 0)$ .

För att bestämma denna sannolikhet betraktar vi täthetsfunktionen för vektorn  $(I_m, \dots, I_{n+1})$

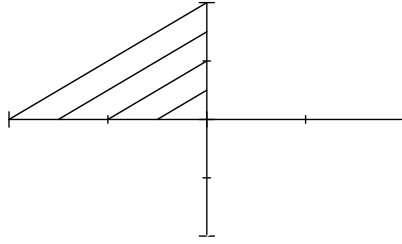
$$dF = \left(\frac{1}{2\pi\sigma^2}\right)^{(n-m+2)/2} e^{-\frac{\sum_{i=m}^n x_i^2}{2\sigma^2}} dx_m \cdots dx_{n+1}.$$

I denna funktions definitionsområde avgränsar händelsen  $(Y_0 < 0, Y_1 > 0)$  ett område som bestäms av de två planen

$$\begin{aligned}
 \sum_{i=m}^n l_i y_i &= 0, \\
 \sum_{i=m}^n l_i y_{i+1} &= 0.
 \end{aligned}$$

För att få en inblick i vad som sker görs räkningarna först för fallet  $n = m = 0$ .

Detta gäller om  $E(P_i | N_a) = E(P_i)$  vilket inte allmänt är sant ty ej oberoende. Palmsannolikheter? Variant av stora talens lag?



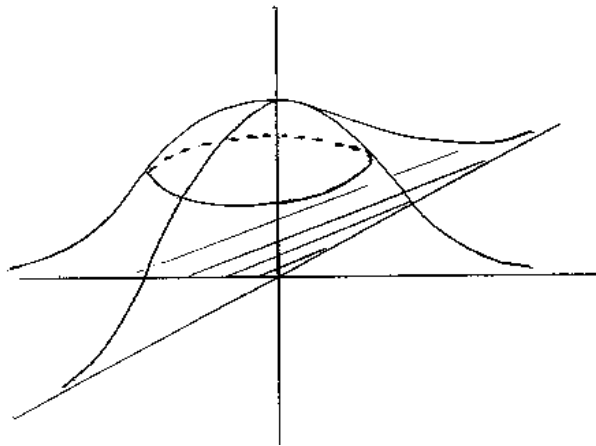
De två planen ovan kan nu skrivas  $l_0 y_0 = 0$  och  $l_0 y_1 = 0$ . Området som avgränsas,  $l_0 y_0 < 0$  och  $l_0 y_1 > 0$ , är då det streckade området i figuren nedan. Vi observerar att vinkeln  $v$  mellan de två planen kan erhållas på följande sätt. Planens normalvektorer  $\mathbf{n}_1$  och  $\mathbf{n}_2$  erhålls till

$$\mathbf{n}_1 = (l_0, 0) \text{ och } \mathbf{n}_2 = (0, l_0)$$

och för dessa gäller

$$\cos(v) = \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = 0$$

vilket naturligtvis ger, som väntat,  $v = \pi/2$  ( $90^\circ$ ). En figur över täthetsfunktionen ses nedan



och då denna är symmetrisk ser vi nu att

$$P(Y_0 < 0, Y_1 > 0) = \frac{1}{4} = \frac{\pi/2}{2\pi}.$$

I det allmänna fallet resonerar vi på följande sätt. De två planen skär ut en "tartbit" ur täthetsfunktionens definitionsområde och eftersom funktionen är symmetrisk blir sannolikheten för att hamna i denna "tartbit" densamma som "tartbitens" vinkel delat med  $2\pi$  ( $360^\circ$ ). Om vi betecknar denna vinkel med  $v$  erhålls

$$P(Y_0 < 0, Y_1 > 0) = \frac{v}{2\pi}.$$

Vinkeln  $v$  mellan de två planen är densamma som vinkeln mellan planens normaler. Dessa normaler är

$$\mathbf{n}_1 = (l_m, \dots, l_n, 0) \text{ och } \mathbf{n}_2 = (0, l_m, \dots, l_n)$$

och för dessa gäller

$$\begin{aligned} \cos(v) &= \frac{(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2)}{|\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|} \\ &= \frac{\sum_{i=m}^{n-1} l_i l_{i+1}}{\sum_{i=m}^n l_i^2}. \end{aligned}$$

Detta ger nu den av oss sökta formeln på förväntad period till

$$E(P) \approx \frac{2\pi}{\arccos\left(\frac{\sum_{i=m}^{n-1} l_i l_{i+1}}{\sum_{i=m}^n l_i^2}\right)}.$$

### 3.5 Slutskys sats

Linjär filtrering av en vitt brus process  $\{I_t\}$  kan skapa mönster där inga ursprungligen fanns. Detta är en mycket dålig egenskap hos linjära filter men lyckligtvis kan man ofta minska effekten av den, mer om det senare. Här skall vi istället besvara frågan: Hur periodisk kan den filtrerade vitt brus processen bli? Svaret på denna fråga ges av Slutsky:s sats, men innan vi går in på denna måste vi införa en del ny matematik.

**Definition 3.3** Med en talföljd  $\{a_i\}$ :s  $z$ -transform skall vi mena funktionen

$$A(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k z^k$$

där  $z$  är ett godtyckligt komplext tal. Om  $z = e^{iv}$  så skriver vi

$$A(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{ikv}.$$

Hitills har vi alltid betraktat ändliga linjära filter  $L = [l_i]_{i=m}^n$  men för att få enklare beteckningar skall vi utvidga dem till  $L = [l_i]_{i=-\infty}^{\infty}$ . Det är då underförstått att om  $L$  är ändligt så är  $l_i = 0$  för  $i = m-1, m-2, \dots$  och  $i = n+1, n+2, \dots$

Med den filtrerade serien  $\{Y_t\}$ :s spektraltäthet skall vi förstå funktionen

$$R(v) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} E(Y_t Y_{t+k}) e^{ikv} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k e^{ikv}.$$

Med hjälp av formel (3.8b) finner man att för en  $MA(\infty)$ -process gäller

$$\begin{aligned} (3.10) \quad R(v) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j l_{k-j} e^{ikv} = \sum_{j=-\infty}^{\infty} l_j e^{ijv} \sum_{k=-\infty}^{\infty} l_{k-j} e^{i(k-j)v} \\ &= L(v) L(-v) = L(v) \overline{L(v)} \\ &= |L(v)|^2. \end{aligned}$$

Ur detta samband mellan spektraltätheten och filterfunktionen följer att även den förra är symmetrisk ty

$$(3.11) \quad R(v) = L(v)L(-v) = L(-(-v))L(-v) = R(-v).$$

Denna egenskap ger att spektraltätheten även kan skrivas

$$\begin{aligned} R(v) &= \gamma_0 + \sum_{k=-\infty}^{-1} \gamma_k e^{ikv} + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k e^{ikv} \\ &= \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (e^{ikv} + e^{-ikv}) \\ &= \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(kv) \end{aligned}$$

vilket i sin tur ger sambandet

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \cos(jv) R(v) dv &= \int_0^{\pi} \cos(jv) \left( \gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \cos(kv) \right) dv \\ &= \pi \gamma_j \end{aligned}$$

varav

$$(3.12) \quad \gamma_j = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(jv) d\mathcal{R}(v)$$

där  $d\mathcal{R}(v) = R(v) dv$ .

Slutligen behöver vi följande definition av en konvergenstyp:

**Definition 3.4** Den stokastiska följderna  $\{Y_t\}$  säges konvergera i sannolikhet mot  $Y$  om det till varje  $\epsilon > 0$  gäller att

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (P |Y_t - Y| > \epsilon) = 0.$$

Denna typ av konvergens skriver vi:  $\text{plim} Y_t = Y$ .

**Sats 3.5 (Slutsky 1937)** Låt  $\{I_t\}$  vara en vitt brus process och tag följande två linjära filter

$$L_1 = [1, 1] \quad \text{och} \quad L_2 = [1, -1]$$

samt bilda av dessa filtret

$$L_{nm} = L_1^n (L_2^m).$$

Låt talen  $m$  och  $n$  närma sig oändligheten på ett sådant sätt att  $\lim \frac{m}{n} = \theta$  där  $0 < \theta < 1$ . Då konvergerar

$$Y_{nm}(t) = L_{nm}(I_t) / \sqrt{\gamma_{nm}(0)},$$

där  $\gamma_{nm}(0) = V(L_{nm}(I_t))$ , i sannolikhet mot en sinuskurva med perioden

$$p = \frac{2\pi}{\arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)}.$$

**Bevis.** Processen  $\{L_{nm}(I_t)\}$ 's spektraltäthet erhålls med hjälp av (3.10) till

$$\begin{aligned} |L_{nm}(v)|^2 &= (1 + e^{iv})^n (1 + e^{-iv})^n (1 - e^{iv})^m (1 - e^{-iv})^m \\ &= (2 + e^{iv} + e^{-iv})^n (2 - e^{iv} - e^{-iv})^m \\ &= 2^{n+m} (1 + \cos(v))^n (1 - \cos(v))^m \\ &= 2^{2(n+m)} \cos^{2n}\left(\frac{v}{2}\right) \sin^{2m}\left(\frac{v}{2}\right). \end{aligned}$$

Ekvation (3.12) ger nu att (se appendix)

$$\begin{aligned} \gamma_{nm}(0) &= \frac{1}{\pi} 2^{2(n+m)} \int_0^\pi \cos^{2n}\left(\frac{v}{2}\right) \sin^{2m}\left(\frac{v}{2}\right) dv \\ &= \frac{2^{2(n+m)} \Gamma(m+1/2) \Gamma(n+1/2)}{\pi \Gamma(m+n+1)} \\ \gamma_{nm}(1) &= \gamma_{nm}(0) \frac{n-m}{m+n+1} \\ \gamma_{nm}(2) &= \gamma_{nm}(0) \frac{m^2 + n^2 - 6mn - n - m}{(m+n+2)(m+n+1)} \end{aligned}$$

där, med hjälp av Strilings formel,  $\Gamma(x) = \sqrt{2\pi} e^{-x} x^{x+1/2} e^{a_n/12n}$ ,  $0 < a_n < 1$ . Spektraltätheten till processen  $\{Y_{nm}(t)\}$  erhålls nu till

$$\begin{aligned} R_{nm}(v) &= \frac{\pi \Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1/2) \Gamma(n+1/2)} \cos^{2n}\left(\frac{v}{2}\right) \sin^{2m}\left(\frac{v}{2}\right) \\ &= \frac{2^{-n-m} \pi \Gamma(m+n+1)}{\Gamma(m+1/2) \Gamma(n+1/2)} (1 + \cos(v))^n (1 - \cos(v))^m \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_{nm}(k) e^{ikv} \end{aligned}$$

där  $\rho_{nm}(k) = \gamma_{nm}(k) / \gamma_{nm}(0)$ . Denna funktion  $R_{nm}(v)$  har maximum då  $v = \arccos((n-m)/(n+m))$  vilket man lätt övertygar sig om genom att beräkna derivatan av  $\ln R_{nm}(v) = \text{konstant} + n \ln(1 + \cos(v)) + m \ln(1 - \cos(v))$ .

Om vi nu sätter  $\cos(v) = \frac{n-m}{n+m} + x$  där  $-\frac{2n}{n+m} < x < \frac{2}{n+m}$  så erhålls med hjälp av Stirlings formel att

$$(3.13) \quad R_{nm}(v) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sqrt{m+n+1} \left(1 - x \frac{m+n}{2m}\right)^m \left(1 + x \frac{m+n}{2n}\right)^n.$$

Då  $x = 0$  ser vi ur (3.13) att  $\lim R_{nm}(v) = \infty$ . För  $x \neq 0$  kan man visa att  $R_{nm}(v)$  konvergerar likformigt mot noll i varje intervall som ej innehåller  $\arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)$ . Därmed har vi "visat" att

$$R(v) = \lim R_{nm}(v) = \begin{cases} \infty & v = \arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) \\ 0 & v \neq \arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right) \end{cases}.$$

Härur följer att  $\int R_{nm}(v) dv$  konvergerar mot en trappstegsfunktion med ett enda trappsteg för  $v = \arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)$

Då relation (3.12) kan skrivas

$$\rho_j = \frac{1}{\pi} \cos(jv) \, d\mathcal{R}$$

erhålls att trappstegets höjd är  $\pi$ , ty  $\rho_0 = 1$ . Således finner vi

$$(3.14) \quad \rho_j = \lim \rho_{nm}(j) = \cos\left(j \arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)\right), \quad j = 0, 1, 2, \dots$$

Därmed är vi klara med förberedelserna för att kunna visa att  $Y_{nm}(t)$  konvergerar i sannolikhet mot en sinuskurva med period

$$p = \frac{2\pi}{\arccos\left(\frac{1-\theta}{1+\theta}\right)}.$$

Först konstaterar vi att en dylik sinuskurva satisfierar differensekvationen

$$(3.15) \quad Y_{t+2} - 2\rho_1 Y_{t+1} + Y_t = 0 \quad t = 1, 2, 3, \dots$$

där  $\rho_1$  erhålls ur (3.14). Omvänt ger differensekvationen (3.15) en sinuskurva med period  $p$ .

Låt nu  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  vara sådana att  $Y_t = \text{plim} Y_{nm}(t)$  för  $t = 1, 2, \dots, N$ . Bilda variablerna  $T_{nm}(t)$  enligt

$$T_{nm}(t) = Y_{nm}(t+2) - 2\rho_{nm}(1) Y_{nm}(t+1) + Y_{nm}(t) \quad t = 1, 2, \dots, N.$$

För dessa gäller

$$\begin{aligned} E(T_{nm}(t)) &= 0 \\ V(T_{nm}(t)) &= E(Y_{nm}(t+2) - 2\rho_{nm}(1) Y_{nm}(t+1) + Y_{nm}(t))^2 \\ &= 1 + 4\rho_{nm}^2(1) + 1 - 4\rho_{nm}^2(1) + 2\rho_{nm}(2) - 4\rho_{nm}^2(1) \\ &= 2(1 - 2\rho_{nm}^2(1) + \rho_{nm}(2)) \end{aligned}$$

Om vi nu kan visa att  $T_{nm}(t), t = 1, 2, \dots, N$  simultant konvergerar mot noll i sannolikhet så följer att differensekvation (3.15) gäller och därmed att följden  $\{Y_{nm}(t)\}$  är en sinuskurva med den ovan angivna perioden. För ett godtyckligt tal  $\epsilon > 0$  erhålls med hjälp av Tjebysjov:s olikhet att

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{N-2} |T_{nm}(i)| > \epsilon\right) &\leq \frac{E\left(\sum_{i=1}^{N-2} |T_{nm}(i)|\right)^2}{\epsilon^2} \\ \{\text{Chung sid 48}\} &\leq \frac{2^2 \sum_{i=1}^{N-2} E|T_{nm}(i)|^2}{\epsilon^2} \\ &= \frac{4(N-2)(1 - 2\rho_{nm}^2(1) + \rho_{nm}(2))}{\epsilon^2} \\ \{\text{se appendix}\} &= \frac{2^3(N-2)}{\epsilon^2} \frac{8mn + 4m + 4n + 2}{(m+n+1)^2(m+n+2)} \end{aligned}$$

och det följer att  $\text{plim} \sum |T_{nm}(i)| = 0$ . Detta är ekvivalent med att

$$\text{plim} T_{nm}(i) = 0 \quad \text{för } i = 1, 2, \dots, N-2.$$

■

### 3.6 Hur linjära filter konstrueras

I föregående sektion har vi gett metoder för att undersöka egenskaperna hos, på förhand givna, linjära filter. Nu skall vi ge en metod för det omvända problemet: *Hur skall det linjära filter, som har vissa på förhand givna egenskaper, se ut?*

Nyckeln till den sökta metoden gavs redan i avsnittet om Slutsky:s sats – "Lineär filtrering av en vitt brus process  $\{I_t\}$  skapar mönster där inga ursprungligen fanns". Härav följer att vi måste välja vårt linjära filter  $L = [l_i]_{i=m}^n$  så att storleksordningen av  $L(I_t)$  blir mycket mindre än storleksordningen av  $L(c_t + s_t)$ . På så sätt blir den filtrerade brus processen:s inflytande obetydligt och dess speciella uppförande blir ointressant.

Nu är begreppet storleksordning diffust och vår första uppgift blir att skärpa detta begrepp, så att det blir hanterbart. Betrakta därför

$$L(I_t) = \sum_{i=m}^n l_i I_{t-i} \quad t \in T'$$

där  $\sum_{i=m}^n l_i = 1$  och  $I_t \in ON(0, \sigma)$ . För denna process gäller

$$\begin{aligned} E(L(I_t)) &= \sum_{i=m}^n l_i E(I_{t-i}) = 0, \\ V(L(I_t)) &= \sum_{i=m}^n l_i^2 V(I_{t-i}) = \sigma^2 \sum_{i=m}^n l_i^2. \end{aligned}$$

Av dessa två uttryck ser vi att om  $V(L(I_t))$  är liten, blir även  $L(I_t)$  det. Denna observation ger oss följande definition på ett filters storleksordning.

**Definition 3.5** *Filtret  $L_1$  säges vara av lägre storleksordning än filtret  $L_2$  om*

$$\sum_{i=m}^n l_{1i}^2 < \sum_{i=m}^n l_{2i}^2.$$

*Om det ej finns något filter  $L_2$  så att*

$$\sum_{i=m}^n l_{1i}^2 > \sum_{i=m}^n l_{2i}^2$$

*säges filtret  $L_1$  vara optimalt.*

Observera att vi vid definition av storleksordning ej jämför  $L(I_t)$  med  $L(c_t + s_t)$  utan endast med sig själv.

Vi har nu följande sats om optimala filter:

**Sats 3.6** *Det linjära filtret  $L = [l_i]_{i=m}^n$  är optimalt om och endast om*

$$l_i = \frac{1}{m+n+1}, \quad i = m, m+1, \dots, n-1, n.$$

**Bevis.** *För alla linjära filter gäller  $\sum_{i=m}^n l_i = 1$ . Antag nu att filtret är optimalt. Detta är ekvivalent med att  $\sum_{i=m}^n l_i^2$  antar sitt minsta värde under bivillkoret  $\sum_{i=m}^n l_i = 1$ . Lagranges multiplikatormetod ger att vi skall minimera*

funktionen

$$\begin{aligned} F &= F(l_m, \dots, l_n, a) \\ &= \sum_{i=m}^n l_i^2 + a \left( \sum_{i=m}^n l_i - 1 \right) \\ \frac{\partial F}{\partial l_i} &= 2l_i + a \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_{i=m}^n l_i - 1 \end{aligned}$$

sätt  $\frac{\partial F}{\partial l_i} = \frac{\partial F}{\partial a} = 0$  varvid erhålls lösningen

$$a = -\frac{2}{m+n+1} \quad l_i = \frac{1}{m+n+1}.$$

Omvänt, om  $l_i = \frac{1}{m+n+1}$  så antar  $\sum_{i=m}^n l_i^2$  sitt minsta värde under bivillkoret  $\sum_{i=m}^n l_i = 1$ . Således är filtret optimalt. ■

**Följsats 3.1** Det optimala filtrets storleksordning är  $\frac{1}{m+n+1}$ .

**Bevis.**  $\sum_{i=m}^n l_i^2 = \sum_{i=m}^n \left( \frac{1}{m+n+1} \right)^2 = \frac{m+n+1}{(m+n+1)^2} = \frac{1}{m+n+1}$ . ■

I sats 3.6 har filtret ingen annan egenskap än den som alla linjära filter besitter –  $\sum_{i=m}^n l_i = 1$ . För varje ytterligare egenskap som vi lägger på avlägsnar vi oss från det optimala filtret.

Två vanliga egenskaper som man kräver av ett linjärt filter är dels att det skall eliminera periodiska förlopp (säsongvariationer) och dels skall de släppa igenom polynom (konjunkturcykeln). dessa egenskaper ger upphov till två bivillkor som vi kan skriva

$$\begin{aligned} L(c_t) &= c_t, \\ L(s_t) &= 0. \end{aligned}$$

Totalt har vi nu tre villkor på komponenterna  $l_i$ , vilket ger tre ekvationer för att bestämma dessa. Vanligen har filtret mer än tre obestämda komponenter och för att bestämma samtliga minimerar vi

$$\begin{aligned} F &= F(l_m, \dots, l_n, a, b, c) \\ &= \sum_{i=m}^n l_i^2 + a \left( \sum_{i=m}^n l_i - 1 \right) + b(L(c_t) - c_t) + cL(s_t) \end{aligned}$$

med hjälp av Lagranges multiplikator metod.<sup>3</sup>

<sup>3</sup>Jämnare kurvor erhålls om vi i formeln ovan byter ut  $\sum_{i=m}^n l_i^2$  mot  $\sum_{i=m+1}^n (l_i - l_{i-1})^2 + l_m^2 + l_n^2$ . Detta senare uttryck är  $V(L(I_t - I_{t-1}))$ .

En blandning

$$d \sum_{i=m}^n (l_i - l_{i-1})^2 + e \left( \sum_{i=m+1}^n (l_i - l_{i-1})^2 + l_m^2 + l_n^2 \right)$$

av de två uttrycken kan också förekomma.



För att illustrera metodiken vid konstruktion av linjära filter skall vi nu ge ett par exempel. I båda exemplen skall vi hitta det symmetriska linjära filter som släpper igenom linjära polynom och som eliminerar sinusfunktioner med period 12.

**Exempel 3.3** Bilda det symmetriska linjära filter av ordning 7 som är sådant att a)  $L(a + bt) = a + bt$ , b)  $L(\sin(\pi t/6) + c) = 0$  och c)  $V(L(I_t))$  minimeras.

**Lösning.** Först noterar vi att villkoret  $\sum_{i=-3}^3 l_i = 1$  tillsammans med symmetrin ger

$$\begin{aligned} L(a + bt) &= \sum_{i=-3}^3 l_t (a + b(t - i)) \\ &= a \sum_{i=-3}^3 l_t + b \sum_{i=-3}^3 l_t (t - i) \\ &= a + bt - b \sum_{i=-3}^3 l_i i \\ \{ \text{på grund av symmetrin} \} &= a + bt. \end{aligned}$$

Vi har därmed visat att: varje symmetriskt linjärt filter släpper igenom linjära polynom.

För att finna villkor på filtret som utsläcker periodiciteter utvecklar vi

$$\begin{aligned} L(\sin(\pi t/6 + c)) &= \sum_{i=-3}^3 l_i \sin(\pi(t - i)/6 + c) \\ &= l_0 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_1 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-1} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\ &\quad + \frac{1}{2}l_2 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + \frac{1}{2}l_{-2} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\ &\quad - l_3 \cos\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + l_{-3} \cos\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\ &= \left(\frac{1}{2}l_{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-1} + l_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_1 + \frac{1}{2}l_2\right) \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \end{aligned}$$

För att bli av med  $l_{-3}$  och  $l_3$  har vi använt oss av symmetrin. För att filtret skall släcka angiven periodicitet måste därför gälla

$$l_{-2} + \sqrt{3}l_{-1} + 2l_0 + \sqrt{3}l_1 + l_2 = 0.$$

Vi minimerar nu variansen, med hjälp av Lagranges multiplikator metod, under de två bivillkoren a) och b) och erhåller då

$$\begin{aligned} F &= \sum_{i=-3}^3 l_i^2 + \alpha \left( \sum_{i=-3}^3 l_i - 1 \right) + \beta \left( l_{-2} + \sqrt{3}l_{-1} + 2l_0 + \sqrt{3}l_1 + l_2 \right) \\ &= \mathbf{LAL}^T - \mathbf{LB}^T \end{aligned}$$

där

$$\begin{aligned}\mathbb{L} &= (\alpha, \beta, l_{-3}, l_{-2}, l_{-1}, l_0, l_1, l_2, l_3) \\ \mathbb{B} &= (1, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0) \\ \mathbb{A} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.5 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Vi finner nu att

$$\frac{\partial F}{\partial \mathbb{L}} = 2\mathbb{A}\mathbb{L}^T - \mathbb{B}^T$$

och  $\frac{\partial F}{\partial \mathbb{L}} = 0$  ger oss lösningen

$$\mathbb{L}^T = \frac{1}{2}\mathbb{A}^{-1}\mathbb{B}^T$$

varur vi finner vikterna

$$\begin{aligned}l_0 &= -\frac{1}{2} \frac{5\sqrt{3} + 1}{5\sqrt{3} + 38} \approx -0.10, \\ l_1 &= l_{-1} = -\frac{1}{2} \frac{7\sqrt{3} - 6}{10\sqrt{3} + 76} \approx -0.03, \\ l_2 &= l_{-2} = \frac{1}{2} \frac{2\sqrt{3} + 5}{6\sqrt{3} + 16} \approx 0.16, \\ l_3 &= l_{-3} = -\frac{3}{2(2\sqrt{3} - 7)} \approx 0.42.\end{aligned}$$

Det symmetriska filtret av ordning 7 som uppfyller villkoren a) - c) ovan är således

$$L = [0.42, 0.16, -0.03, \underline{-0.10}]$$

och dess storleksordning är

$$\sum_{i=-3}^3 l_i^2 \approx 0.42$$

■

**Exempel 3.4** Bilda det symmetriska linjära filtret av ordning 13 som är sådant att a)  $L(a + bt) = a + bt$ , b)  $L(\sin(\pi t/6) + c) = 0$  och c)  $V(L(I_t))$  minimeras.

**Lösning.** På samma sätt som ovan finner vi

$$\begin{aligned}
 L(\sin(\pi t/6 + c)) &= \sum_{k=-6}^6 l_k \sin(\pi(t-k)/6 + c) \\
 &= l_0 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_1 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-1} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad + \frac{1}{2}l_2 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + \frac{1}{2}l_{-2} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad - l_3 \cos\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) + l_{-3} \cos\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2}l_4 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) - \frac{1}{2}l_{-4} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad - \frac{1}{2}\sqrt{3}l_5 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) - \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-5} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &\quad - l_6 \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) - l_{-6} \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right) \\
 &= \left(-l_{-6} - \frac{\sqrt{3}}{2}l_{-5} - \frac{1}{2}l_{-4} + \frac{1}{2}l_{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-1} + l_0\right. \\
 &\quad \left.+ \frac{1}{2}\sqrt{3}l_1 + \frac{1}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}l_5 - l_6\right) \sin\left(c + \frac{1}{6}\pi t\right)
 \end{aligned}$$

För att bli av med  $l_{-3}$  och  $l_3$  har vi använt oss av symmetrin. För att filtret skall släcka angiven periodicitet måste därför gälla

$$-l_{-6} - \frac{\sqrt{3}}{2}l_{-5} - \frac{1}{2}l_{-4} + \frac{1}{2}l_{-2} + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_{-1} + l_0 + \frac{1}{2}\sqrt{3}l_1 + \frac{1}{2}l_2 - \frac{1}{2}l_4 - \frac{\sqrt{3}}{2}l_5 - l_6 = 0.$$

På samma sätt som förut erhålls funktionen

$$F = \mathbf{L}\mathbf{A}\mathbf{L}^T - \mathbf{L}\mathbf{B}^T$$

fast här får vi istället en matris om 15 rader och kolumner. Det symmetriska filtret av ordning 13 som uppfyller villkoren a) - c) ovan blir således

$$L = [0.07, 0.07, 0.07, 0.08, 0.08, 0.08, \underline{0.08}]$$

och dess storleksordning är

$$\sum_{i=-3}^3 l_i^2 \approx 0.077.$$

■

### 3.7 Slutsatser

I exempel 3.3 är den optimala storleksordningen  $1/7 \approx 0.14$  och det av oss framräknade filtrets storleksordning ca 0.42 ligger ganska långt från det optimala

värdet. Helt annorlunda är läget i exempel 3.4 där den optimala storleksordningen är  $1/13 \approx 0.077$ . Att jämföras med det framräknade filtrets storleksordning som är 0.077. Ett till tre decimalers noggrannhet ekvivalent värde. Nackdelen med detta senare filter är att man ej kan filtrera tidseriens sex sista värden vilka, åtminstone vid ekonomiska tidserier, innehåller den mest intressanta informationen.<sup>4</sup>

Ett filter av ordning 13 som är allmänt använt är

$$L = \frac{1}{24} [2] [12] = [0.04, 0.08, 0.08, 0.08, 0.08, 0.08, \underline{0.08}].$$

Detta filter brukar kallas "det centrerade 12-månaders filtret" och dess storleksordning är 0.08. Anledningen till att man använder detta filter istället för filtret i exempel 3.4 är historiska. Förr fanns inga datamaskiner utan man räknade för hand och det centrerade 12-månadersfiltret lämpar sig väl för dylik hantering. När det dessutom är av samma storleksordning (skillnad tre tusendelar) varför skall man byta?

---

<sup>4</sup>Valet mellan ett kort respektive långt filter skall baseras på tidseriens utseende. Om den är jämn kan man ta ett kort filter men om den är hoppig får man ta ett långt.

## 4

# Polynomfilter

I kapitel 3 utgick vi ifrån att säsongrensning görs med hjälp av linjära filter och utredde dessa filters egenskaper. I detta kapitel skall vi utgå ifrån att vår tidsserie  $\{O_t\}$  lokalt kan approximeras av ett polynom. Med lokal approximation menar vi att till en bit av tidsserien anpassas ett polynom med hjälp av minsta kvadratmetoden. Motsatsen, global approximation, innebär att anpassningen görs till hela tidsserien.

Denna metodik, med lokal polynomapproximation, är föregångare till den av oss i kapitel 3 beskrivna metodiken med linjära filter. Lokal polynomapproximation, som den beskrivs nedan, leder faktiskt till ett linjärt filter och blir således den naturliga länken mellan det intuitivt självklara och metodiken med linjär filtrering.

I detta kapitel är  $n = 2m + 1$  (udda) så att tidsserien  $\{O_t\}$  och dess filtrerade motsvarighet ej blir tidsförskjutna i förhållande till varandra.

### 4.1 Metod

Låt  $\{O_t\}_{t=0}^N$  vara vår tidsserie. Till de  $n$  första värdena  $O_0, O_1, \dots, O_{n-1}$  anpassar vi med hjälp av minsta kvadratmetoden ett polynom av grad  $p$  ( $\leq n - 1$ ) där  $p$  är på förhand valt. Detta polynom skriver vi

$$p_0(s) = a_{00} + a_{10}s + \dots + a_{p0}s^p$$

Ersätt nu det mittersta värdet i  $O_0, O_1, \dots, O_{n-1}$  med polynomets konstanta term  $a_{00}$ . Upprepa detta förfarande på  $O_1, O_2, \dots, O_n$  med polynom

$$p_1(s) = a_{01} + a_{11}s + \dots + a_{p1}s^p$$

osv. Allmänt har vi att det mittersta värdet av  $O_t, O_{t+1}, \dots, O_{t+n-1}$  ersätts med  $a_{0t}$  där  $a_{0t} = p_t(0)$ .

För att lättare förstå och reda ut konsekvenserna av denna metod, samt att

den är rimlig, inför vi följande hjälpvariabler  $X_{s,t}$

$$\begin{aligned}
X_{-m,t} &= O_t, \\
X_{(-m+1),t} &= O_{t+1}, \\
&\vdots \\
(4.1) \quad X_{0,t} &= O_{t+m} \quad t = 0, 1, \dots, N - 2m \\
&\vdots \\
X_{(m-1),t} &= O_{t+2m-1}, \\
X_{m,t} &= O_{t+2m}.
\end{aligned}$$

Detta framställningssätt tydliggör att vårt filterfönster består av ett udda antal termer där den mittersta är  $X_{0,t} = O_{t+m}$  och det är detta mittersta värde som ersätts med  $a_{0t}$  dvs vi inför approximationen att  $O_{t+m} = X_{0,t} \approx a_{0t}$ . Den modell vi därmed skapat kan skrivas

$$(4.2) \quad X_{s,t} = a_{0t} + a_{1t}s + \dots + a_{pt}s^p + I_{s,t}.$$

där  $I_{s,t} \in ON(0, \sigma)$ . Med hjälp av minsta kvadratmetoden skall vi, i tidsfönstret  $[-m, m]$ , minimera

$$(4.3) \quad Q_t = \sum_{s=-m}^m (x_{st} - a_{0t} - a_{1t}s - \dots - a_{pt}s^p)^2$$

där  $t = m + 1, m + 2, \dots, N - m - 1, N - m$  för att finna skattningar på parametrarna  $a_{0t}, a_{1t}, \dots, a_{pt}$ . Det mittersta värdet  $O_{t+m} = X_{0,t}$  ersätts därefter med skattningen  $\hat{a}_{0t}$ . Detta innebär en transformation av tidsserien  $\{O_t\}_{t=m}^{N-m}$  till tidsserien  $\{\hat{a}_{0t}\}_{t=m}^{N-m}$ .

Vid minimeringen av (4.3) erhålls ekvationssystemet

$$\begin{aligned}
(4.4) \quad a_{0t}(2m+1) + a_{1t} \sum s + \dots + a_{pt} \sum s^p &= \sum x_{s,t} \\
a_{0t} \sum s + a_{1t} \sum s^2 + \dots + a_{pt} \sum s^{p+1} &= \sum s x_{s,t} \\
&\vdots = \vdots \\
a_{0t} \sum s^p + a_{1t} \sum s^{p+1} + \dots + a_{pt} \sum s^{2p} &= \sum s^p x_{s,t}
\end{aligned}$$

där samtliga summationer  $\sum = \sum_{s=-m}^m$ . Detta ekvationssystem kan med hjälp av matrisbeteckningar skrivas

$$\mathbb{S}_1 \mathbf{a}_t^T = \mathbb{S}_2 \mathbf{x}_t^T$$

där

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_t &= (a_{0t}, a_{1t}, \dots, a_{pt}) \\ \mathbf{x}_t &= (x_{-m,t}, x_{-m+1,t}, \dots, x_{m,t}) \\ \mathbb{S}_1 &= \begin{pmatrix} 2m+1 & \sum s & \cdots & \sum s^p \\ \sum s & \sum s^2 & \cdots & \sum s^{p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum s^p & \sum s^{p+1} & \cdots & \sum s^{2p} \end{pmatrix} \\ \mathbb{S}_2 &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ -m & -m+1 & \cdots & m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-m)^{p-1} & (-m+1)^{p-1} & \cdots & m^{p-1} \\ (-m)^p & (-m+1)^p & \cdots & m^p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

varur vi finner den observerade skattningen på  $\hat{\mathbf{a}}_{0t}^T$  till  $\mathbb{S}_1^{-1}\mathbb{S}_2\mathbf{x}_t^T$ .

## 4.2 Filtrering av tidsseriens ändrar

En brist, när vi hitills har filtrerat en tidsserie  $\{O_t\}_{t=0}^N$  med ett symmetriskt filter  $L$  av ordning  $2m+1$ , har varit att vi undvikit att tala om vad de  $m$  första respektive  $m$  sista värdena skall ersättas med. Det är speciellt de  $m$  sista värdena som innehåller den, för oss, mest intressanta informationen ty de ger vink om tidsseriens kommande utveckling. Denna brist skall vi nu delvis täppa till.

Vi tecknar den filtrerade tidsserien med  $\{Y_t\}_{t=0}^N$  där och det gäller

$$Y_{s+t} = \begin{cases} \hat{a}_{0,m} + \hat{a}_{1,m}s + \cdots + \hat{a}_{p,m}s^p & t = m, \quad s = -m, \dots, -1 \\ \hat{a}_{0t} & t = m, \dots, N-m, \quad s = 0 \\ \hat{a}_{0,N-m} + \hat{a}_{1,N-m}s + \cdots + \hat{a}_{p,N-m}s^p & t = N-m, \quad s = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

För att bestämma  $Y_t$  för de  $m$  sista värdena, dvs då  $t = N-m+1, \dots, N$ , använder vi oss av att

$$Y_{s+N-m} = \hat{a}_{0,N-m} + \hat{a}_{1,N-m}s + \cdots + \hat{a}_{p,N-m}s^p \quad s = 1, \dots, m$$

ty högra ledet ovan är minsta kvadratanpassningen till  $\{O_t\}_{t=N-2m}^N$ . Speciellt erhålls för  $t = N$  att

$$Y_N = \hat{a}_{0,N-m} + \hat{a}_{1,N-m}m + \cdots + \hat{a}_{p,N-m}m^p$$

Samma metod kan användas för att bestämma de  $m$  första värdena  $Y_0, Y_1, \dots, Y_{m-1}$ .

**Exempel 4.1** *Konstruera ett polynomfilter med hjälp av ett tredjegradspolynom och ett fönster av längden 7. Ange även skattningar på de sista tre värdena och gör en prognos ett steg framåt.*

**Lösning.** *Det gäller att*

$$(4.5) \quad \hat{\mathbf{a}}_{0t}^T = \mathbb{S}_1^{-1}\mathbb{S}_2\mathbf{x}_t^T$$

där  $n = 7$  ( $m = 3$ ). Då  $p = 3$  erhålls matriserna

$$\mathbb{S}_1 = \begin{pmatrix} 7 & \sum_{s=-3}^3 s & \sum_{s=-3}^3 s^2 & \sum_{s=-3}^3 s^3 \\ \sum_{s=-3}^3 s & \sum_{s=-3}^3 s^2 & \sum_{s=-3}^3 s^3 & \sum_{s=-3}^3 s^4 \\ \sum_{s=-3}^3 s^2 & \sum_{s=-3}^3 s^3 & \sum_{s=-3}^3 s^4 & \sum_{s=-3}^3 s^5 \\ \sum_{s=-3}^3 s^3 & \sum_{s=-3}^3 s^4 & \sum_{s=-3}^3 s^5 & \sum_{s=-3}^3 s^6 \end{pmatrix}$$

$$\mathbb{S}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ (-3)^2 & (-2)^2 & (-1)^2 & 0 & 1^2 & 2^2 & 3^2 \\ (-3)^3 & (-2)^3 & (-1)^3 & 0 & 1^3 & 2^3 & 3^3 \end{pmatrix}$$

och lösningen till ekvation 4.5 ger följande skattningar

$$\begin{aligned} \hat{a}_{0,t} &= \frac{1}{21} (-2X_{-3,t} + 3X_{-2,t} + 6X_{-1,t} + 7X_{0,t} + 6X_{1,t} + 3X_{2,t} - 2x_{3,t}), \\ \hat{a}_{1,t} &= \frac{1}{252} (22X_{-3,t} - 67X_{-2,t} - 58X_{-1,t} + 58X_{1,t} + 67X_{2,t} - 22X_{3,t}), \\ \hat{a}_{2,t} &= \frac{1}{84} (5X_{-3,t} - 3X_{-1,t} - 4X_{0,t} - 3X_{1,t} + 5X_{3,t}), \\ \hat{a}_{3,t} &= \frac{1}{36} (-X_{-3,t} + X_{-2,t} + X_{-1,t} - X_{1,t} - X_{2,t} + X_{3,t}). \end{aligned}$$

Vi observerar först att koefficienterna framför  $X_{s,t}$  ej beror av  $t$ ,  $s$  eller  $X_{s,t}$ . Således har vi att vår filtrerade tidsserie kan skrivas

$$\{\hat{a}_{0,t}\} = \left\{ \sum_{s=-m}^m l_s X_{s,t} \right\} = \left\{ \sum_{s=-m}^m l_s O_{t+m-s} \right\}$$

där  $l_s$  endast beror av polynomets gradtal och längden av den bit, av den ursprungliga tidsserien, som används. Dessa konstanter  $l_s$  har dessutom egenskapen  $\sum_{s=-m}^m l_s = 1$  (se appendix 2) och således kan teorin i kapitel 3 tillämpas.

Vi erhåller nu att den filtrerade tidsserien kan skrivas

$$Y_t = \begin{cases} \hat{a}_{0,t} & t = 3, 4, \dots, N-3, \\ \hat{a}_{0,N-2} + \hat{a}_{1,N-2} + \hat{a}_{2,N-2} + \hat{a}_{3,N-2} & t = N-2, \\ \hat{a}_{0,N-2} + 2\hat{a}_{1,N-2} + 2^2\hat{a}_{2,N-2} + 2^3\hat{a}_{3,N-2} & t = N-1, \\ \hat{a}_{0,N-2} + 3\hat{a}_{1,N-2} + 3^2\hat{a}_{2,N-2} + 3^3\hat{a}_{3,N-2} & t = N. \end{cases}$$

samt att en skattning vid tidpunkt  $N+1$  blir

$$\hat{Y}_{N+1} = \hat{a}_{0,N-2} + 4\hat{a}_{1,N-2} + 4^2\hat{a}_{2,N-2} + 4^3\hat{a}_{3,N-2}.$$

Om vi uttrycker detta i den ursprungliga beteckningen för tidsserien så erhålls

$$\begin{aligned} Y_{N-2} &= \frac{1}{42} (O_{N-6} - 4O_{N-5} + 2O_{N-4} + 12O_{N-3} + 19O_{N-2} + 16O_{N-1} - 4O_N), \\ Y_{N-1} &= \frac{1}{42} (4O_{N-6} - 7O_{N-5} - 4O_{N-4} + 6O_{N-3} + 16O_{N-2} + 19O_{N-1} + 8O_N), \\ Y_N &= \frac{1}{42} (-2O_{N-6} + 4O_{N-5} + O_{N-4} - 4O_{N-3} - 4O_{N-2} + 8O_{N-1} + 39O_N), \\ \hat{Y}_{N+1} &= \frac{1}{7} (-4O_{N-6} + 6O_{N-5} + 4O_{N-4} - 3O_{N-3} - 8O_{N-2} - 4O_{N-1} + 16O_N). \end{aligned}$$



*Stoleksordningen för de fem filtren blir*

$$\begin{aligned}L & : \left(\frac{1}{21}\right)^2 \left((-2)^2 + 3^2 + 6^2 + 7^2 + 6^2 + 3^2 + (-2)^2\right) = \frac{1}{3}, \\L_{N-2} & : \left(\frac{1}{42}\right)^2 \left(1^2 + (-4)^2 + 2^2 + 12^2 + 19^2 + 16^2 + (-4)^2\right) = \frac{19}{42}, \\L_{N-1} & : \left(\frac{1}{42}\right)^2 \left(4^2 + (-7)^2 + (-4)^2 + 6^2 + 16^2 + 19^2 + 8^2\right) = \frac{19}{42}, \\L_N & : \left(\frac{1}{42}\right)^2 \left((-2)^2 + 4^2 + 1^2 + (-4)^2 + (-4)^2 + 8^2 + 39^2\right) = \frac{13}{14}, \\L_{N+1} & : \left(\frac{1}{7}\right)^2 \left((-4)^2 + 6^2 + 4^2 + (-3)^2 + (-8)^2 + (-4)^2 + 16^2\right) = \frac{59}{7}.\end{aligned}$$

*All filters komponenter summerar sig till 1 (se appendix). ■*

## 5

# Henderson filter

I en fotnot i avsnitt 3.6 konstaterades att minimering av  $V(\nabla Y_t)$  gav jämnare kurvor än minimering av  $V(Y_t)$ , där

$$\begin{aligned} Y_t &= L(Y_t), \\ \nabla Y_t &= Y_t - Y_{t-1}. \end{aligned}$$

Vi gick då ej närmare in på vad vi menade med att en kurva är jämnare än en annan. Det skall vi ej heller göra nu (läsaren får nöja sig med att det går att ge en strikt definition) utan nöjer oss med följande lösa, men intuitiva, figur: Om

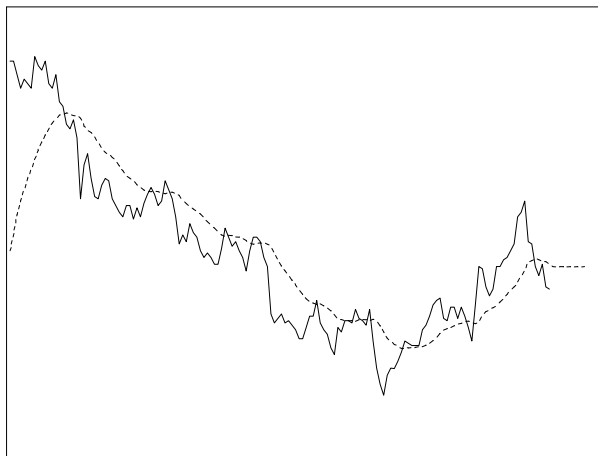


Figure 5.1: Kurva 1 är streckad och kurva 2 heldragen.

både kurva 1 och 2 i figuren är väl anpassade till tidsserien  $\{O_t\}$  så säges kurva 1 vara jämnare än kurva 2. Av denna lösa definition följer att den jämnare kurvan ger upphov till en större residualvariation än den ojämna och det bör således gälla

$$(5.1) \quad V(O_t - L_1(O_t)) > V(O_t - L_2(O_t))$$

där  $L_1$  är det filter som erhålls vid minimering av  $V(\nabla Y_t)$  och  $L_2$  erhålls vid minimering av  $V(Y_t)$ . För att kunna visa ?? ovan behöver vi känna till utseendet på komponenterna i de två filtren  $L_1$  och  $L_2$ . Eftersom vi sedan tidigare känner komponenterna för  $L_2$ ,  $l_{2i} = 1/(2n+1)$ , behöver vi endast bestämma komponenterna  $l_{1i}$  för  $L_1$ . Dessa följer av

**Sats 5.1** Låt  $I_t \in ON(0, \sigma)$  och sätt  $Y_t = \sum_{i=-n}^n l_i I_{t-i}$ . Minimering av  $V(\nabla Y_t)$  under bivillkoret  $\sum l_i = 1$  och  $l_i = l_{-i}$  ger

$$l_i = \frac{3 \left( (n+1)^2 - i^2 \right)}{(n+1)(2n+1)(2n+3)} \quad i = -n, -n+1, \dots, n-1, n$$

**Bevis.** Se appendix 3 ■

Därmed känner vi komponenterna för de båda filtren  $L_1$  och  $L_2$ . Beviset för att olikheten (5.1) gäller överlätes på läsaren.

Ovanstående resultat, att minimering av  $V(\nabla Y_t)$  ger jämnare kurvor än minimering av  $V(Y_t)$ , ger mer allmänt att minimering av  $V(\nabla^k Y_t)$  ger jämnare kurvor än minimering av  $V(\nabla^{k-1} Y_t)$ . Detta är en av anledningarna till att Hendersonfiltret ser ut som det gör. I sin artikel [1], *Note on graduation by adjusted average*, väljer Henderson att minimera  $V(\nabla^3 Y_t)$  med motiveringen

*we shall tentatively adopt the usual criterion of smoothness, namely the smallness of the mean square of the error in the third difference.*

Att Henderson väljer att minimera  $V(\nabla^k Y_t)$  för  $k = 3$  och inget annat  $k$  är således baserat på praxis.

## 5.1 Henderson-filtret – konstruktion

Henderson-filtret kännetecknas av att  $V(\nabla^3 Y_t)$  skall minimeras under följande tre bivillkor:

1. Tredjegradspolynom skall släppas igenom.
2. Filtret skall vara symmetriskt.
3. Komponenterna skall summera sig till ett.

Om

$$P_3(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3$$

är tredjegradspolynomet och  $L_H$  det sökta Henderson-filtret så ger (1) att

$$L_H(P_3(t)) = P_3(t)$$

vilket också kan skrivas

$$P_3(t) = \sum_{i=-n}^n l_i P_3(t-i).$$

Detta är ekvivalent med att följande fyra ekvationer gäller

$$\begin{aligned} a_3 &= \sum l_i a_3 \\ a_2 &= \sum l_i (a_2 - 3a_3 i) \\ a_1 &= \sum l_i (a_1 - 2a_2 i + 3a_3 i^2) \\ a_0 &= \sum l_i (a_0 - a_1 i + a_2 i^2 - a_3 i^3) \end{aligned}$$

Av dessa igenkännes den första som (3). De övriga tre ekvationerna kan skrivas

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^n i l_i &= 0 \\ \sum_{i=-n}^n i^2 l_i &= 0 \\ \sum_{i=-n}^n i^3 l_i &= 0 \end{aligned}$$

där den första och sista är trivialt uppfyllda för symmetriska filter. Återstår att minimera  $V(\nabla^3 Y_t)$  under bivillkoren

$$\begin{aligned} \sum_{i=-n}^n i^2 l_i &= 0, \\ \sum_{i=-n}^n l_i &= 1, \\ l_i &= l_{-i}. \end{aligned}$$

Innan vi ger oss in på denna minimering skall vi söka ett uttryck för  $V(\nabla^3 Y_t)$ . Definiera  $l_i = 0$  då  $|i| > n$ .

$$\begin{aligned} V(\nabla^3 Y_t) &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i \nabla^3 I_{t-i}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i (I_{t-i} - 3I_{t-i-1} + 3I_{t-i-2} - I_{t-i-3})\right) \\ &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} (l_i - 3l_{i-1} + 3l_{i-2} - l_{i-3}) I_{t-i}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \nabla^3 l_i I_{t-i}\right) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla^3 l_i)^2. \end{aligned}$$

Därmed har vi att den funktion som skall minimeras med avseende på vikterna  $l_i$  är

$$F = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla^3 l_i)^2 + a \left( \sum_{i=-n}^n l_i - 1 \right) + b \sum_{i=-n}^n i^2 l_i.$$

Lagranges multiplikatormetod ger oss ekvationerna (se appendix 4 för en diskussion)

$$\begin{aligned} -2\sigma^2 \nabla^6 l_{i+3} + a + bi^2 &= 0 \\ \sum_{i=-n}^n l_i &= 1 \\ \sum_{i=-n}^n i^2 l_i &= 0 \end{aligned}$$

varav den första säger oss att  $l_{i+3}$  måste vara ett polynom av högst grad 8.<sup>1</sup> Då  $l_i = 0$  för  $i = \pm(n+1), \pm(n+2), \pm(n+3)$  erhålls att

$$l_i = \left((n+1)^2 - i^2\right) \left((n+2)^2 - i^2\right) \left((n+3)^2 - i^2\right) (a_0 + a_1 i^2).$$

De två senare ekvationerna ger nu att

$$a_0 + a_1 i^2 = a_2 \left(3(n+2)^2 - 16 - 11i^2\right)$$

där  $a_2$  väljes så att  $\sum_{i=-n}^n l_i = 1$ . Henderson-filtret:s komponenter kan således skrivas

$$l_i = a_2 \left((n+1)^2 - i^2\right) \left((n+2)^2 - i^2\right) \left((n+3)^2 - i^2\right) \left(3(n+2)^2 - 16 - 11i^2\right)$$

där

$$a_2 = \frac{315}{8(2n+9)(2n+7)(2n+5)(2n+3)(2n+1)(2n-1)(n+3)(n+2)(n+1)}.$$

I X11-ARIMA förekommer tre typer av Henderson-filter och dessa är

$$\begin{aligned} 9\text{-termers} \quad L_{H9} &= [-0.041, -0.010, 0.118, 0.267, \underline{0.331}] \\ 13\text{-termers} \quad L_{H13} &= [-0.019, -0.028, 0.0, 0.066, 0.147, 0.214, \underline{0.240}] \\ 23\text{-termers} \quad L_{H23} &= [-0.004, -0.011, -0.016, -0.015, -0.005, 0.013, 0.039, \\ &\quad 0.068, 0.097, 0.122, 0.138, \underline{0.148}] \end{aligned}$$

och deras egenskaper undersöks närmare i nästa sektion.

## 5.2 Henderson-filtret – egenskaper

I detta avsnitt skall vi undersöka, med hjälp av den i kapitel 3.3.1-3.3.2 framtagna metodiken, vilka funktioner som Henderson-filtret av ordning 13 avbildar på noll respektive sig själv. Grundläggande data om 9-termers filtret finns i appendix 5 och det överlåtes åt läsaren att själv genomföra nedanstående analys för detta.

I säsongrensningens programmet X11-ARIMA används, efter att ha rensat bort säsonger, Henderson-filtret av ordning 13 för att erhålla en första skattning av trendcykeln. Denna skattning dras sedan från den säsongrensade serien vilket

<sup>1</sup>Sex differenser skall resultera i en kvadratisk term.

ger en skattning av den irreguljära komponenten. Med hjälp av dessa två skattningar bildas ett mått vars storlek slutligen bestämmer vilket Henderson-filter som skall användas.

Av tabell 1 nedan framgår att filtret av ordning 13 avbildar sinusfunktioner med periodiciteterna 5.36, 2.14, 3.02, 3.83 och 2.51 på noll. Detta ger som resultat ytterligare en rensning av snabba säsongmönster. Filtrets storleksordning är 0.204 vilket är betydligt sämre än filtret  $\frac{1}{24}$  [2] [12] vars storleksordning var 0.08. Dock erhålls en ytterligare dämpning av den irreguljära komponenten.

I tabell 2 ser vi att roten 1 förekommer precis 4 gånger vilket svarar mot den önskade egenskapen att tredjegradspolynom skall slippa igenom. Lösningen till differensekvationen

$$L_{H13}(x_t) = x_t$$

kan skrivas

$$x_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \sum_{j=1}^4 f_j(t)$$

där funktionerna  $f_1(t), \dots, f_4(t)$  är periodiska med perioderna 2.35, 3.64, 3.64 och 2.35. Detta innebär att vissa snabba periodicitetsmönster kan slinka igenom men det troliga är att alla dessa redan släckts.

Tabell 1:  $L_{H13}(x_t) = 0$

k	$r_k$	$ r_k $	
1	1.95	1.95	
2	0.51	0.51	
3	$0.39 + 0.92i$	1.00	$f_1$
4	$0.39 - 0.92i$	1.00	
5	$-0.98 + 0.21i$	1.00	$f_2$
6	$-0.98 - 0.21i$	1.00	
7	$-0.49 + 0.87i$	1.00	$f_3$
8	$-0.49 - 0.87i$	1.00	
9	$-0.07 + 1.00i$	1.00	$f_4$
10	$-0.07 - 1.00i$	1.00	
11	$-0.81 + 0.59i$	1.00	$f_5$
12	$-0.81 - 0.59i$	1.00	

Tabell 2:  $L_{H13}(x_t) = x_t$

k	$r_k$	$ r_k $	
1	1	1	
2	1	1	
3	1	1	
4	1	1	
5	$-1.93 + 0.97i$	2.16	$f_1$
6	$-1.93 - 0.97i$	2.16	
7	$-0.30 + 1.93i$	1.95	$f_2$
8	$-0.30 - 1.93i$	1.95	
9	$-0.08 + 0.51i$	0.51	$f_3$
10	$-0.08 - 0.51i$	0.51	
11	$-0.41 + 0.21i$	0.46	$f_4$
12	$-0.41 - 0.21i$	0.46	

De viktigaste egenskaperna hos filtret av ordning 13 är således att en ytterligare utsläckning av snabba periodiciteter sker och att tredjegradspolynom (trendcykeln) släpps igenom.

## Appendix 1

Att

$$\int_0^\pi \sin^{2m} \left( \frac{v}{2} \right) \cos^{2n} \left( \frac{v}{2} \right) dv = \frac{\Gamma(m+1/2) \Gamma(n+1/2)}{\Gamma(m+n+1)} = B(m+1/2, n+1/2)$$

där  $\Gamma(x) = (x-1)\Gamma(x-1)$ , se t ex [2]. Härav följer

$$\begin{aligned} \pi\gamma_{nm}(0) &= 2^{2(m+n)} B(m+1/2, n+1/2) \\ \pi\gamma_{nm}(1) &= 2^{2(m+n)} \int_0^\pi \cos(v) \sin^{2m} \left( \frac{v}{2} \right) \cos^{2n} \left( \frac{v}{2} \right) dv \\ &= \left\{ \cos(v) = 2 \cos^2 \left( \frac{v}{2} \right) - 1 \right\} \\ &= 2^{2(m+n)} \left[ 2 \int_0^\pi \sin^{2m} \left( \frac{v}{2} \right) \cos^{2(n+1)} \left( \frac{v}{2} \right) dv \right. \\ &\quad \left. - \int_0^\pi \sin^{2m} \left( \frac{v}{2} \right) \cos^{2n} \left( \frac{v}{2} \right) dv \right] \\ &= 2^{2(m+n)} (2B(m+1/2, n+1+1/2) - B(m+1/2, n+1/2)) \\ &= 2^{2(m+n)} B(m+1/2, n+1/2) \left( 2 \frac{n+1/2}{m+n+1} - 1 \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_{nm}(1) = \gamma_{nm}(0) \frac{n-m}{m+n+1}$$

$$\begin{aligned} \pi\gamma_{nm}(2) &= 2^{2(m+n)} \int_0^\pi \cos(2v) \sin^{2m} \left( \frac{v}{2} \right) \cos^{2n} \left( \frac{v}{2} \right) dv \\ &= \left\{ \cos(2v) = 8 \cos^4 \left( \frac{v}{2} \right) - 8 \cos^2 \left( \frac{v}{2} \right) + 1 \right\} \\ &= 2^{2(m+n)} (8B(m+1/2, n+2+1/2) \\ &\quad - 8B(m+1/2, n+1+1/2) + B(m+1/2, n+1/2)) \\ &= 2^{2(m+n)} B(m+1/2, n+1/2) \left( 8 \frac{(n+3/2)(n+1/2)}{(m+n+1)(m+n+2)} \right. \\ &\quad \left. - 8 \frac{n+1/2}{m+n+1} + 1 \right) \end{aligned}$$

$$\gamma_{nm}(2) = \gamma_{nm}(0) \frac{m^2 + n^2 - 6mn - m - n}{(m+n+1)(m+n+2)}$$

Då  $\rho_{nm}(k) = \frac{\gamma_{nm}(k)}{\gamma_{nm}(0)}$  erhålls

$$\begin{aligned} 1 - 2\rho_{nm}^2(1) + \rho_{nm}(2) &= 1 - 2 \left( \frac{n-m}{m+n+1} \right)^2 + \frac{m^2 + n^2 - 6mn - m - n}{(m+n+1)(m+n+2)} \\ &= \frac{8mn + 4m + 4n + 2}{(m+n+1)^2 (m+n+2)} \end{aligned}$$

## Appendix 2

**Sats 5.2** De filter som bildas med polynommetoden i kapitel 4 är linjära filter vars komponenter summerar sig till 1.

**Bevis.** Att filtren är linjära visas redan i kapitel 4. Här skall vi visa att komponenterna summerar sig till 1. I beviset kommer vi att använda oss av en del elementär matrisalgebra. En referens bland många är [3] men vilken bok som helst, som i sitt register har ordet 'cofactor', duger.

Den filtrerade tidsserien  $\{Y_t\}_{t=m}^N$  definierades av

$$Y_{s+t} = \begin{cases} \hat{a}_{0t} & t = m, \dots, N-m, \quad s = 0 \\ \hat{a}_{0, N-m} + \hat{a}_{1, N-m}s + \dots + \hat{a}_{p, N-m}s^p & t = N-m, \quad s = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

vilket kan skrivas

$$Y_{s+t} = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \hat{\mathbf{a}}_t^T & t = m, \dots, N-m, \quad s = 0 \\ (1, s, \dots, s^p) \hat{\mathbf{a}}_t^T & t = N-m, \quad s = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

men  $\hat{\mathbf{a}}_t^T = \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2 \mathbf{X}_t^T$  och således har vi

$$Y_{s+t} = \begin{cases} (1, 0, \dots, 0) \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2 \mathbf{X}_t^T & t = m, \dots, N-m, \quad s = 0 \\ (1, s, \dots, s^p) \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2 \mathbf{X}_t^T & t = N-m, \quad s = 1, 2, \dots, m \end{cases}$$

Radvektorn  $(1, s, \dots, s^p) \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2$  är precis den vektor som innehåller filtrets komponenter  $(l_{-m}, l_{-m+1}, \dots, l_{m-1}, l_m)$  och om vi multiplicerar den med vektorn  $\mathbf{e} = (1, 1, \dots, 1)$  så får vi summan  $\sum l_i$  för  $s = 0, 1, 2, \dots, m$ .

Således

$$\sum_{i=-m}^m l_i = (1, s, \dots, s^p) \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2 \mathbf{e}^T.$$

Först finner vi att

$$\mathbb{S}_2 \mathbf{e}^T = \left( 2m+1, \sum_{s=-m}^m s, \dots, \sum_{s=-m}^m s^p \right)^T.$$

Därefter konstaterar vi att

$$\mathbb{S}_1^{-1} = \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,p+1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{p,p+1} \\ A_{p+1,1} & A_{p+1,2} & \dots & A_{p+1,p+1} \end{pmatrix}$$

där  $A_{ij}$  är den  $i,j$ :te kofaktorn till matrisen  $\mathbb{S}_1$  och  $D = \det(\mathbb{S}_1)$ . Med dessa beteckningar erhåller vi

$$\begin{aligned} \mathbb{S}_1^{-1} \mathbb{S}_2 \mathbf{e}^T &= \frac{1}{D} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1,p+1} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2,p+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{p1} & A_{p2} & \dots & A_{p,p+1} \\ A_{p+1,1} & A_{p+1,2} & \dots & A_{p+1,p+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2m+1 \\ \sum_{s=-m}^m s \\ \vdots \\ \sum_{s=-m}^m s^{p-1} \\ \sum_{s=-m}^m s^p \end{pmatrix} \\ &= (1, 0, \dots, 0)^T \end{aligned}$$

ty  $\mathbb{S}_2 \mathbf{e}^T$  utgör första raden i  $\mathbb{S}_1$  och påståendet följer från en sats om determinanters utveckling med hjälp av kofaktorer. ■



### Appendix 3

Definiera  $l_i = 0$  då  $|i| > n$  då kan  $V(\nabla Y_t)$  skrivas

$$\begin{aligned} V(\nabla Y_t) &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i I_{t-i} - \sum_{i=-\infty}^{\infty} l_i I_{t-1-i}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} (l_i - l_{i-1}) I_{t-i}\right) \\ &= V\left(\sum_{i=-\infty}^{\infty} \nabla l_i I_{t-i}\right) \\ &= \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla l_i)^2. \end{aligned}$$

Vi har således att söka de  $l_i$  för vilka funktionen

$$F = \sigma^2 \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla l_i)^2 + a \left( \sum_{i=-n}^n l_i - 1 \right)$$

antar sitt minsta värde. Derivation ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial l_k} &= -2\sigma^2 \nabla^2 l_{k+1} + a \\ \frac{\partial F}{\partial a} &= \sum_{i=-n}^n l_i - 1 \end{aligned}$$

och vi erhåller ekvationerna

$$\begin{aligned} \nabla^2 l_{k+1} &= \frac{a}{2\sigma^2}, \\ \sum_{i=-n}^n l_i &= 1. \end{aligned}$$

Av den första ekvationen följer att  $l_{k+1}$  måste vara ett polynom av högst grad 2 ty

$$\begin{aligned} \nabla^2 (a_0 + a_1 k + a_2 k^2) &= \nabla (\nabla a_0 + a_1 \nabla k + a_2 \nabla k^2) \\ &= \nabla (0 + a_1 + 2a_2 k) \\ &= 2a_2. \end{aligned}$$

Vidare vet vi att  $l_{n+1} = l_{-(n+1)} = 0$  och vi finner slutligen att

$$\begin{aligned} l_i &= \text{konstant } (i - (n+1))(i + (n+1)) \\ &= \text{konstant } (i^2 - (n+1)^2)^2 \end{aligned}$$

där konstanten bestämmas med hjälp av  $\sum_{i=-n}^n l_i = 1$ . Vi finner

$$1 = c \sum_{i=-n}^n (i^2 - (n+1)^2)^2 = -c \frac{1}{3} (2n+3)(2n+1)(n+1)$$

varav följer att

$$l_i = \frac{3}{(2n+3)(2n+1)(n+1)} \left( (n+1)^2 - i^2 \right)^2.$$

## Appendix 4

Det är inte uppenbart att

$$\frac{\partial}{\partial l_i} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla^3 l_i)^2 = -2\nabla^6 l_{i+3}$$

men detta är en följd av följande lemma

**Lemma 5.3 (Vandermonde)** *Följande identitet, mellan binomialkoefficienterna, gäller*

$$\sum_{r=0}^s \binom{\alpha}{r} \binom{\beta}{s-r} = \binom{\alpha+\beta}{s}.$$

För att visa vår identitet ovan konstaterar vi först att

$$\frac{\partial}{\partial l_i} \sum_{i=-\infty}^{\infty} (\nabla^k l_i)^2$$

innehåller  $k+1$  termer som i sin tur innehåller  $l_i$ . Dessa är, som man lätt övertygar sig om,

$$(\nabla^k l_i)^2, (\nabla^k l_{i+1})^2, \dots, (\nabla^k l_{i+k})^2.$$

Låt oss betrakta den  $j$ :te termen och utveckla den

$$\begin{aligned} \nabla^k l_{i+j} &= \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m l_{i+j-m} \\ &= \sum_{0 \leq m < j} \binom{k}{m} (-1)^m l_{i+j-m} + \binom{k}{j} (-1)^j l_i \\ &\quad + \sum_{j < m \leq k} \binom{k}{m} (-1)^m l_{i+j-m} \end{aligned}$$

Ur denna identitet följer att

$$\frac{\partial}{\partial l_i} (\nabla^k l_{i+j})^2 = 2(-1)^j \binom{k}{j} \left( \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m l_{i+j-m} \right)$$

vilket ger

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial l_i} \sum_{j=0}^k (\nabla^k l_{i+j})^2 &= 2 \sum_{j=0}^k (-1)^j \binom{k}{j} \left( \sum_{m=0}^k \binom{k}{m} (-1)^m l_{i+j-m} \right) \\ &= 2 \sum_{j=0}^k \sum_{m=0}^k (-1)^{j+m} \binom{k}{j} \binom{k}{m} l_{i+j-m} \\ &= \{\text{summera över diagonaler och använd lemma 5.3}\} \\ &= -2(1-B)^{2k} l_{i+k} \end{aligned}$$

## Appendix 5

Filtret med 9 termer är av storleksordning 0.283.

Tabell 1:  $L_{H9}(x_t) = 0$

k	$r_k$	$ r_k $	
1	2.56	2.56	
2	0.39	0.39	
3	$-0.62 + 0.79i$	1.00	$f_1$
4	$-0.62 - 0.79i$	1.00	
5	$-0.02 + 1.00i$	1.00	$f_2$
6	$-0.02 - 1.00i$	1.00	
7	$-0.96 + 0.29i$	1.00	$f_3$
8	$-0.96 - 0.29i$	1.00	

Tabell 2:  $L_{H9}(x_t) = x_t$

k	$r_k$	$ r_k $	
1	1	1	
2	1	1	
3	1	1	
4	1	1	
5	$-1.80 + 1.52i$	2.36	$f_1$
6	$-1.80 - 1.52i$		
7	$-0.32 + 0.27i$	0.42	$f_2$
8	$-0.32 - 0.27i$		

# Bibliography

- [1] R. Henderson (1916), *Note on graduation by adjusted average*, Transactions of the American Society of Actuaries, 17, 43-48
- [2] L. Råde, B. Westergren, *Mathematics handbook for science and engineering* 3 ed, Studentlitteratur 1995.
- [3] G. Strang, *Linear Algebra and Its Applications* 2 ed, Academic Press